Operations Research

Johannes Antweiler

28. Juli 2015

1 Übung S 1

Aufgabe 2	**15 Punkte**

Ein Unternehmen produziert die beiden Erzeugnisse E_1 und E_2. Dazu stehen dem Unternehmen in einem bestimmten Zeitraum 80 Mengeneinheiten (ME) des Rohstoffes R_1 sowie 50 ME des Rohstoffes R_2 zur Verfügung. Der Rohstoffverbrauch je ME der einzelnen Erzeugnisse ist der nachstehenden Tabelle zu entnehmen.

	E_1	E_2
R_1	3	4
R_2	1	5

Der Gewinn für die einzelnen Erzeugnisse beträgt je ME für E_1 20 € und für E_2 50 €.

Hinweis: Eine ME entspricht einer Tonne.

a) Stellen Sie das entsprechende mathematische Modell (lineares Optimierungsmodell) zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximaler Gewinnerwartung auf.

b) Bestimmen Sie mittels Simplexalgorithmus die optimale Lösung des Problems. Interpretieren Sie das Ergebnis.

c) Welche Ecke lässt sich aus dem Anfangstableau des Aufgabenteils b) identifizieren?

Lösung S 1

a) Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir das lineare Optimierungsmodell

$$
\begin{array}{llrl}
\max & x_0 & = 20x_1 + 50x_2 & \\
\text{u.d.N.} & & 3x_1 + \ \ 4x_2 & \leq 80 \\
 & & 1x_1 + \ \ 5x_2 & \leq 50 \\
\text{NNB} & & x_1, \quad x_2 & \geq \ \ 0
\end{array}
$$

b) Durch Einführung von *Schlupfvariablen* s_i ergibt sich daraus folgende Aufgabe:

$$
\begin{array}{llrl}
\max & x_0 & & \\
\text{u.d.N.} & x_0 - 20x_1 - 50\,x_2 & & = \ \ 0 \\
 & \quad 3x_1 + \ \ 4\,x_2 + s_1 & & = 80 \\
 & \quad 1x_1 + \ \ 5\,x_2 & + s_2 & = 50 \\
\text{NNB} & \quad x_1, \quad x_2\ ,\ s_1\ ,\ s_2 & & \geq \ \ 0
\end{array}
$$

Dieses notieren wir nun in der üblichen Tableau-Schreibweise.

TABLEAU I:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	-20	-50	0	0	0
0	3	4	1	0	80
0	1	5	0	1	50

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{-20; -50; 0; 0\} = -50$$

Damit wird die x_2-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite“ dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	*Quotient*
1	−20	−50	0	0	0	
0	3	4	1	0	80	80 : 4 = 20
0	1	$\boxed{5}$	0	1	50	50 : 5 = 10

Wegen $\min\{20; 10\} = 10$ ist die 3. Zeile die *Pivotzeile*.

Damit wird die „5“ zum *Pivotelement*.

Das *Pivotelement* bringen wir durch Division auf den Wert 1

Hilfstableau:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	
1	−20	−50	0	0	0	$I + 50 \cdot III$
0	3	4	1	0	80	$II - 4 \cdot III$
0	$1/5$	$\boxed{1}$	0	$1/5$	10	

Nun müssen wir alle Elemente in der *Pivotspalte* durch geeignete Addition der *Pivotzeile* auf Null bringen.

TABLEAU II:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	−10	0	0	10	500
0	$11/5$	0	1	$-4/5$	40
0	$1/5$	1	0	$1/5$	10

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{1; -10; 0; 0; 10\} = -10$$

Damit wird die x_1-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite" dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	*Quotient*
1	-10	0	0	10	500	
0	$^{11}/_5$	0	1	$-^4/_5$	40	$40 : {}^{11}/_5 = {}^{200}/_{11}$
0	$^1/_5$	1	0	$^1/_5$	10	$10 : {}^1/_5 = 50$

Damit ist die 2. Zeile *Pivotzeile* und die „$^{11}/_5$" das *Pivotelement*.

Das *Pivotelement* bringen wir durch Division auf den Wert 1

Hilfstableau:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	
1	-10	0	0	10	500	$I + 10 \cdot II$
0	$\boxed{1}$	0	$^5/_{11}$	$-^4/_{11}$	$^{200}/_{11}$	
0	$^1/_5$	1	0	$^1/_5$	10	$III - {}^1/_5 \cdot II$

Nun müssen wir alle Elemente in der *Pivotspalte* durch geeignete Addition der *Pivotzeile* auf Null bringen.

TABLEAU III:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	0	0	$^{50}/_{11}$	$^{70}/_{11}$	$^{7500}/_{11}$
0	1	0	$^5/_{11}$	$-^4/_{11}$	$^{200}/_{11}$
0	0	1	$-^1/_{11}$	$^3/_{11}$	$^{70}/_{11}$

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2) = ({}^{7500}/_{11} \mid {}^{200}/_{11}, {}^{70}/_{11}, 0, 0)$$

Die Lösung lautet:

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2) = ({}^{7500}/_{11} \mid {}^{200}/_{11}, {}^{70}/_{11}, 0, 0)$$

Hieraus entnehmen wir: Der Betrieb stellt $x_1 = {}^{200}/_{11}$ Einheiten von Produkt E_1 und $x_2 = {}^{70}/_{11}$ Einheiten von Produkt E_2 her.

Der Gesamtgewinn beträgt $x_0 = {}^{7500}/_{11}$ Euro.

c) Das Anfangstableau lautete:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	−20	−50	0	0	0
0	3	4	1	0	80
0	1	5	0	1	50

Die zugehörige Basislösung lautet:

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2) = (0 \mid 0, 0, 80, 50)$$

Die zugehörige Basisecke $(x_1; x_2) = (0, 0)$ ist der Ursprung des Koordinatensystems.

2 Übung S 2

Aufgabe 2	**15 Punkte**

Ein Betrieb soll zwei Produkte P_1, P_2 herstellen. Dazu stehen der Firma 206 Arbeitsstunden zur Verfügung. Nachstehender Tabelle sind die Herstellungszeiten in Stunden pro Stück sowie der mit dem Verkauf pro Stück erzielbare Deckungsbeitrag angegeben.

	P_1	P_2
Herstellungszeit in Stunden pro Stück	3	4
Deckungsbeitrag in Euro pro Stück	1	5

Von P_2 können aufgrund der aktuellen Absatzprobleme höchstens 50 Stück produziert werden.

a) Stellen Sie das entsprechende mathematische Modell (lineares Optimierungsmodell) zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximalem Gesamtdeckungsbeitrag auf.

b) Bestimmen Sie mittels Simplexalgorithmus die optimale Lösung des Problems. Wie viele Stück sind von P_1 und P_2 herzustellen? Wie hoch ist der Gesamtdeckungsbeitrag?

c) Aufgrund einer Gesetzesänderung müssen die beiden Produkte einer Prüfung unterzogen werden. Die Prüfung erfolgt vollautomatisch auf einer neuen Maschine, die 110 Stunden für diesen Zweck zur Verfügung steht. Produkt 1 benötigt eine Stunde pro Stück; Produkt 2 beansprucht die Maschine zwei Stunden pro Stück. Bleibt die unter b) ermittelte Lösung optimal? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.

Lösung S 2

a) Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir das lineare Optimierungsmodell

$$\begin{array}{lrcl} \max & x_0 = 1x_1 + 5x_2 & & \\ \text{u.d.N.} & 3x_1 + 4x_2 & \leq & 206 \\ & 1x_2 & \leq & 50 \\ \text{NNB} & x_1, \quad x_2 & \geq & 0 \end{array}$$

b) Durch Einführung von *Schlupfvariablen* s_i ergibt sich daraus folgende Aufgabe:

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_0 \\
\text{u.d.N.} & x_0 - 1x_1 - 5\,x_2 \qquad\qquad = \quad 0 \\
 & \qquad 3x_1 + 4\,x_2 + s_1 \qquad = 206 \\
 & \qquad\;\; x_1 \quad 1\,x_2 \qquad + s_2 = \;\; 50 \\
\text{NNB} & \qquad\;\; x_1, \quad x_2\;,\; s_1\;,\; s_2 \geq \quad 0
\end{array}
$$

Dieses notieren wir nun in der üblichen Tableau-Schreibweise.

<u>TABLEAU I</u>:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	-1	-5	0	0	0
0	3	4	1	0	206
0	0	1	0	1	50

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{-1; -5; 0; 0\} = -5$$

Damit wird die x_2-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite“ dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	*Quotient*
1	-1	-5	0	0	0	
0	3	4	1	0	206	$206 : 4 = 51{,}5$
0	0	$\boxed{1}$	0	1	50	$50 : 1 = 50$

Wegen $\min\{51{,}5; 50\} = 50$ ist die 3. Zeile die *Pivotzeile*.

Damit wird die „1“ zum *Pivotelement*.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	
1	−1	−5	0	0	0	$I + 5 \cdot III$
0	3	4	1	0	206	$II - 4 \cdot III$
0	0	1	0	1	50	

Nun müssen wir alle Elemente in der *Pivotspalte* durch geeignete Addition der *Pivotzeile* auf Null bringen.

TABLEAU II:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	−1	0	0	5	250
0	3	0	1	−4	6
0	0	1	0	1	50

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{1; -1; 0; 0; 5\} = -1$$

Damit wird die x_1-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite“ dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	*Quotient*
1	−1	0	0	5	250	
0	$\boxed{3}$	0	1	−4	6	6 : 3 = 2
0	0	1	0	1	50	50 : 0 entfällt

Damit ist die 2. Zeile *Pivotzeile* und die „3“ das *Pivotelement*.

Das *Pivotelement* bringen wir durch Division auf den Wert 1

Hilfstableau:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	
1	-1	0	0	5	250	$I + II$
0	$\boxed{1}$	0	$1/3$	$4/3$	2	
0	0	1	0	1	50	

Nun müssen wir alle Elemente in der *Pivotspalte* durch geeignete Addition der *Pivotzeile* auf Null bringen.

TABLEAU III:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	0	0	$1/3$	$19/3$	252
0	1	0	$1/3$	$4/3$	2
0	0	1	0	1	50

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2) = (252 \mid 2, 50, 0, 0)$$

Die Lösung lautet:

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2) = (252 \mid 2, 50, 0, 0)$$

Hieraus entnehmen wir: Der Betrieb stellt $x_1 = 2$ Stück von Produkt P_1 und $x_2 = 50$ Stück von Produkt P_2 her.

Der Gesamtgewinn beträgt $x_0 = 252$ Euro.

c) Die zusätzliche Bedingung lautet:

$$1x_1 + 2x_2 \leq 110$$

Setzt man hier die soeben ermittelten Werte für x_1 und x_2 ein, so erhält man:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 50 = 102 \leq 110$$

Diese Aussage ist wahr, daher bleibt die ermittelte Lösung optimal.

3 Übung S 3

Aufgabe 2	**15 Punkte**

Die XYZ GmbH stellt die Erzeugnisse P_1 und P_2 her. Zur Produktion wird lediglich der Rohstoff R benötigt, wovon für die nächste Periode insgesamt 198 Stück geliefert werden können. Zudem stehen der Firma 75 Arbeitsstunden für die Herstellung zur Verfügung. Nachstehender Tabelle sind der Rohstoffverbrauch je Mengeneinheit der Erzeugnisse, die Herstellungszeiten in Stunden pro Stück sowie der mit dem Verkauf pro Stück erzielbare Deckungsbeitrag angegeben:

	P_1	P_2
Rohstoffverbrauch in ME pro Stück	3	6
Herstellungszeit in Stunden pro Stück	2	1
Deckungsbeitrag in Euro pro Stück	30	40

$a)$ Stellen Sie das entsprechende mathematische Modell (lineares Optimierungsmodell) zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximalem Gesamtdeckungsbeitrag auf.

$b)$ Bestimmen Sie mittels Simplexalgorithmus die optimale Lösung des Problems. Wie viele Stück sind von P_1 und P_2 herzustellen? Wie hoch ist der Gesamtdeckungsbeitrag?

$c)$ Eine Umstellung des Produktionsprozesses ergibt, dass ein Produktionsprogramm nur noch dann zulässig ist, wenn das Verhältnis zwischen den Produkten P_1 und P_2 höchstens 2 : 1 beträgt.

c1) Formulieren Sie die neue Restriktion als lineare Nebenbedingung.

c2) Prüfen Sie nach, ob die unter b) ermittelte Lösung weiterhin optimal bleibt.

Lösung 3

a) Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir das lineare Optimierungsmodell

$$
\begin{array}{llrcl}
\max & x_0 = 30x_1 + 40x_2 & & & \\
\text{u.d.N.} & 3x_1 + 6x_2 & \leq & 198 \\
 & 2x_1 \quad 1x_2 & \leq & 75 \\
\text{NNB} & x_1 \;, \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

b) Durch Einführung von *Schlupfvariablen* s_i ergibt sich daraus folgende Aufgabe:

$$
\begin{array}{ll}
\max & x_0 \\
\text{u.d.N.} & x_0 - 30\,x_1 - 40\,x_2 \qquad\qquad = \;\; 0 \\
 & \qquad 3\,x_1 + \;\; 6\,x_2 + s_1 \qquad = 198 \\
 & \qquad 2\,x_1 + \;\; 1\,x_2 \qquad + s_2 = \;\; 75 \\
\text{NNB} & \qquad x_1, \quad x_2\;,\; s_1\;,\; s_2 \geq \;\; 0
\end{array}
$$

Dieses notieren wir nun in der üblichen Tableau-Schreibweise.

TABLEAU I:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	−30	−40	0	0	0
0	3	6	1	0	198
0	2	1	0	1	75

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{-30; -40; 0; 0\} = -40$$

Damit wird die x_2-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite“ dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	*Quotient*
1	−30	−40	0	0	0	
0	3	$\boxed{6}$	1	0	198	198 : 6 = 33
0	2	1	0	1	75	75 : 1 = 75

Wegen $\min\{33; 75\} = 33$ ist die 2. Zeile die *Pivotzeile*.

Damit wird die „6" zum *Pivotelement*.

Das *Pivotelement* bringen wir durch Division auf den Wert 1

Hilfstableau:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	
1	−30	−40	0	0	0	$I + 40 \cdot II$
0	$1/2$	$\boxed{1}$	$1/6$	0	33	
0	2	1	0	1	75	$III - II$

Nun müssen wir alle Elemente in der *Pivotspalte* durch geeignete Addition der *Pivotzeile* auf Null bringen.

TABLEAU II:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	−10	0	$20/3$	0	1320
0	$1/2$	1	$1/6$	0	33
0	$3/2$	0	$-1/6$	1	42

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{1; -10; 0; 20/3; 0\} = -10$$

Damit wird die x_1-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite" dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	*Quotient*
1	-10	0	$20/3$	0	1320	
0	$1/2$	1	$1/6$	0	33	$33 : 1/2 = 66$
0	$\boxed{3/2}$	0	$-1/6$	1	42	$42 : 3/2 = 28$

Wegen $\min\{66; 28\} = 28$ ist die 2. Zeile die *Pivotzeile*.

Damit wird die „3⁄2" zum *Pivotelement*.

Das *Pivotelement* bringen wir durch Division auf den Wert 1

<u>Hilfstableau</u>:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	
1	-10	0	$20/3$	0	1320	$I + 10 \cdot III$
0	$1/2$	1	$1/6$	0	33	$II - 1/2 \cdot III$
0	$\boxed{1}$	0	$-1/9$	$2/3$	28	

Nun müssen wir alle Elemente in der *Pivotspalte* durch geeignete Addition der *Pivotzeile* auf Null bringen.

<u>TABLEAU III</u>:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	0	0	$50/9$	$20/3$	1600
0	0	1	$2/9$	$1/3$	19
0	1	0	$-1/9$	$2/3$	28

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2) = (1600 \mid 28, 19, 0, 0)$$

Die Lösung lautet:

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2) = (1600 \mid 28, 19, 0, 0)$$

Hieraus entnehmen wir: Der Betrieb stellt $x_1 = 28$ Stück von Produkt P_1 und $x_2 = 19$ Stück von Produkt P_2 her.

Der Gesamtgewinn beträgt $x_0 = 1600$ Euro.

c1) Die zusätzliche Bedingung lautet:

$$P_1 : P_2 \leq 2 : 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} \leq \frac{2}{1} \quad \Leftrightarrow \quad x_1 \leq 2 \cdot x_2$$

c2) Setzt man hier die soeben ermittelten Werte für x_1 und x_2 ein, so erhält man: $28 \leq 2 \cdot 19 = 38$

Diese Aussage ist wahr, daher bleibt die ermittelte Lösung optimal.

4 Übung S 4

Aufgabe 2	**15 Punkte**

Die Bäckerei Knack stellt Laugenbrötchen P_1 und Laugenbrezeln P_2 her. Zur Produktion werden die Rohstoffe Teig R_1 und Salz R_2 benötigt, wobei für die nächste Periode 70 Einheiten Teig und 230 Einheiten Salz geliefert werden können. Zudem können aufgrund der technischen Gegebenheiten insgesamt nur 50 Enderzeugnisse beider Produkte zusammen hergestellt werden. Nachstehender Tabelle sind der Rohstoffverbrauch je Mengeneinheit der Erzeugnisse sowie der mit dem Verkauf pro Stück erzielbare Gewinn zu entnehmen:

	P_1	P_2
Verbrauch von R_1 in ME pro Stück	1	3
Verbrauch von R_2 in ME pro Stück	5	3
Gewinn in Euro pro Stück	4,0	3,5

a) Stellen Sie das entsprechende lineare Optimierungsmodell zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximalem Gesamtgewinn auf.

b) Bestimmen Sie mittels Simplexalgorithmus die optimale Lösung des Problems. Wie viele Stück sind von P_1 und P_2 herzustellen? Wie hoch ist der Gesamtgewinn?

c) Wie kann der optimale Wert einer Schlupfvariablen $s_i = 0$ ökonomisch interpretiert werden? Nehmen Sie kurz Stellung.

Lösung S 2

a) Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir das lineare Optimierungsmodell

$$\begin{array}{llrl}
\max & x_0 = & 1x_1 + 5x_2 & \\
\text{u.d.N.} & & 3x_1 + 4x_2 & \leq 206 \\
& & 1x_2 & \leq 50 \\
\text{NNB} & & x_1, \quad x_2 & \geq 0
\end{array}$$

b) Durch Einführung von *Schlupfvariablen* s_i ergibt sich daraus folgende Aufgabe:

$$
\begin{array}{llcl}
\max & x_0 & & \\
\text{u.d.N.} & x_0 - 1x_1 - 5\,x_2 & = & 0 \\
 & \quad 3x_1 + 4\,x_2 + s_1 & = & 206 \\
 & \quad x_1 \quad 1\,x_2 \qquad + s_2 & = & 50 \\
\text{NNB} & \quad x_1, \quad x_2\ ,\ s_1\ ,\ s_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

Dieses notieren wir nun in der üblichen Tableau-Schreibweise.

<u>TABLEAU I</u>:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	−1	−5	0	0	0
0	3	4	1	0	206
0	0	1	0	1	50

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{-1; -5; 0; 0\} = -5$$

Damit wird die x_2-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite“ dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	*Quotient*
1	−1	−5	0	0	0	
0	3	4	1	0	206	$206 : 4 = 51,5$
0	0	$\boxed{1}$	0	1	50	$50 : 1 = 50$

Wegen $\min\{51,5; 50\} = 50$ ist die 3. Zeile die *Pivotzeile*.

Damit wird die „1“ zum *Pivotelement*.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	
1	−1	−5	0	0	0	$I + 5 \cdot III$
0	3	4	1	0	206	$II - 4 \cdot III$
0	0	1	0	1	50	

Nun müssen wir alle Elemente in der *Pivotspalte* durch geeignete Addition der *Pivotzeile* auf Null bringen.

TABLEAU II:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	−1	0	0	5	250
0	3	0	1	−4	6
0	0	1	0	1	50

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{1; -1; 0; 0; 5\} = -1$$

Damit wird die x_1-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite“ dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	*Quotient*
1	−1	0	0	5	250	
0	$\boxed{3}$	0	1	−4	6	6 : 3 = 2
0	0	1	0	1	50	50 : 0 entfällt

Damit ist die 2. Zeile *Pivotzeile* und die „3“ das *Pivotelement*.

Das *Pivotelement* bringen wir durch Division auf den Wert 1

Hilfstableau:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b	
1	−1	0	0	5	250	$I + II$
0	$\boxed{1}$	0	1/3	4/3	2	
0	0	1	0	1	50	

Nun müssen wir alle Elemente in der *Pivotspalte* durch geeignete Addition der *Pivotzeile* auf Null bringen.

TABLEAU III:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	b
1	0	0	1/3	19/3	252
0	1	0	1/3	4/3	2
0	0	1	0	1	50

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2) = (252 \mid 2, 50, 0, 0)$$

Die Lösung lautet:

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2) = (252 \mid 2, 50, 0, 0)$$

Hieraus entnehmen wir: Der Betrieb stellt $x_1 = 2$ Stück von Produkt P_1 und $x_2 = 50$ Stück von Produkt P_2 her.

Der Gesamtgewinn beträgt $x_0 = 252$ Euro.

c) Die zusätzliche Bedingung lautet:

$$1x_1 + 2x_2 \leq 110$$

Setzt man hier die soeben ermittelten Werte für x_1 und x_2 ein, so erhält man:

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 50 = 102 \leq 110$$

Diese Aussage ist wahr, daher bleibt die ermittelte Lösung optimal.

5 Übung S 5

Aufgabe 2	**15 Punkte**

Die Firma „Haltefix“ stellt Schlitzschrauben P_1 und Kreuzschrauben P_2 her. Zur Produktion wird aus Stahlgranulat R_1 eine Schraube gebrannt und mit dem jeweiligen Kopf versehen, wobei für die nächste Periode 8000 Einheiten des Granulats geliefert werden können. Aufgrund der Nachfragestruktur am Markt werden zum einen von den Schlitzschrauben pro Periode nicht mehr als 150 Stück und zum anderen die Produkte P_1 und P_2 höchstens im Verhältnis $1 : 4$ produziert. Nachstehender Tabelle sind der Rohstoffverbrauch je Mengeneinheit der Erzeugnisse sowie der mit dem Verkauf pro Stück erzielbare Deckungsbeitrag (DB) zu entnehmen:

	P_1	P_2
Verbrauch von R_1 in ME pro Stück	12	13
DB in Euro-Cent pro Stück	16,0	8,0

$a)$ Stellen Sie das entsprechende lineare Optimierungsmodell zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximalem Deckungsbeitrag auf. (*Hinweis*: Überführen Sie hierzu das angegebene Verhältnis in eine lineare Nebenbedingung!)

$b)$ Bestimmen Sie mittels Simplexalgorithmus die optimale Lösung des Problems. Wie hoch ist der optimale Deckungsbeitrag? Wie viele Stück sind hierzu von P_1 und P_2 herzustellen?

$c)$ Aufgrund einer geänderten Nachfrageprognose wird die maximal herzustellende Menge an Schlitzschrauben auf 125 heruntergesetzt.

- c1) Bleibt die unter b) ermittelte Lösung optimal? Begründen Sie kurz Ihre Antwort.
- c2) Geben Sie eine ökonomische Interpretation in Bezug auf die durch die Prognoseänderung betroffene Nebenbedingung an.

Lösung S 5

a) Das angegebene Mengenverhältnis lautet:

$$P_1 : P_2 \leq 1 : 4 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x_1}{x_2} \leq \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad 4x_1 \leq 1x_2 \quad \Leftrightarrow \quad 4x_1 - 1x_2 \leq 0$$

Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir das lineare Optimierungsmodell

$$\begin{array}{llrcr}
\max & x_0 = 16x_1 + 8x_2 & & & \\
\text{u.d.N.} & 12x_1 + 13x_2 & \leq & 8000 \\
 & 1x_1 & \leq & 150 \\
 & 4x_1 - 1x_2 & \leq & 0 \\
\text{NNB} & x_1, \quad x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

b) Durch Einführung von *Schlupfvariablen* s_i ergibt sich daraus folgende Aufgabe:

$$\begin{array}{lrcl}
\max & x_0 & & \\
\text{u.d.N.} & x_0 - 16x_1 - 8\,x_2 & = & 0 \\
 & 12x_1 + 13\,x_2 + s_1 & = & 8000 \\
 & 1\,x_1 \qquad\qquad + s_2 & = & 150 \\
 & 4\,x_1 - 1\,x_2 \qquad\qquad + s_3 & = & 0 \\
\text{NNB} & x_1, \quad x_2\,,\ s_1\,,\ s_2\,,\ s_3 & \geq & 0
\end{array}$$

Dieses notieren wir nun in der üblichen Tableau-Schreibweise.

TABLEAU I:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
1	−16	−8	0	0	0	0
0	12	13	1	0	0	8000
0	1	0	0	1	0	150
0	4	−1	0	0	1	0

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{-16\ ;\ -8\ ;\ 0\ ;\ 0\} = -8$$

Damit wird die x_1-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite“ dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	*Quotient*
1	-16	-8	0	0	0	0	
0	12	13	1	0	0	8000	$8000 : 12 = 666,\overline{6}$
0	1	0	0	1	0	150	$150 : 1 = 150$
0	$\boxed{4}$	-1	0	0	1	0	$0 : 4 = 0$

Wegen $\min\{666,\overline{6}; 150; 0\} = 0$ ist die 4. Zeile die *Pivotzeile*.

Damit wird die „4“ zum *Pivotelement*.

Das *Pivotelement* bringen wir durch Division auf den Wert 1

Hilfstableau:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	
1	-16	-8	0	0	0	0	$I + 16 \cdot IV$
0	12	13	1	0	0	8000	$II - 12 \cdot IV$
0	1	0	0	1	0	150	$III - IV$
0	$\boxed{1}$	$-1/4$	0	0	$1/4$	0	

Nun müssen wir alle Elemente in der *Pivotspalte* durch geeignete Addition der *Pivotzeile* auf Null bringen.

TABLEAU II:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
1	0	-12	0	0	4	0
0	0	16	1	0	-3	8000
0	0	$1/4$	0	1	$-1/4$	150
0	1	$-1/4$	0	0	$1/4$	0

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{0; -12; 0; 0; 4\} = -12$$

Damit wird die x_2-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite“ dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	*Quotient*
1	0	−12	0	0	4	0	
0	0	$\boxed{16}$	1	0	−3	8000	8000 : 16 = 500
0	0	1/4	0	1	−1/4	150	150 : 1/4 = 600
0	1	−1/4	0	0	1/4	0	0 : (−1/4) entfällt

Wegen $\min\{500\ ;\ 600\} = 500$ ist die 2. Zeile die *Pivotzeile*.

Damit wird die „16“ zum *Pivotelement*.

Das *Pivotelement* bringen wir durch Division auf den Wert 1

Hilfstableau:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	
1	0	−12	0	0	4	0	$I + 12 \cdot II$
0	0	$\boxed{1}$	1/16	0	−3/16	500	
0	0	1/4	0	1	−1/4	150	$III - 1/4 \cdot II$
0	1	−1/4	0	0	1/4	0	$IV + 1/4 \cdot II$

Nun müssen wir alle Elemente in der *Pivotspalte* durch geeignete Addition der *Pivotzeile* auf Null bringen.

TABLEAU III:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
1	0	0	$3/4$	0	$7/4$	6000
0	0	1	$1/16$	0	$-3/16$	500
0	0	0	$-1/64$	1	$-13/64$	25
0	1	0	$1/64$	0	$13/64$	125

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (6000 \mid 125, 500, 0, 25, 0)$$

Die Lösung lautet:

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (6000 \mid 125, 500, 0, 25, 0)$$

Hieraus entnehmen wir:

Die Firma Haltefix stellt $x_1 = 125$ [Stück] Schlitzschrauben (P_1) und $x_2 = 500$ [Stück] Kreuzschrauben (P_2) her.

Der Gesamtgewinn beträgt $x_0 = 6000$ Euro-Cent = 60 Euro.

Aus der Lösung entnehmen wir ferner, dass die beiden Schlupfvariablen s_1 (Granulat) und s_3 (Mengenverhältnis) gleich Null sind.

$s_2 = 25$ bedeutet, das noch weitere 25 Schlitzschrauben abgesetzt werden könnten.

c1) Die Herabsetzung der Nachfrage für Schlitzschrauben auf 125 Stück ändert nichts an der Optimalität der Lösung, denn es wurden ja gerade 125 Schlitzschrauben hergestellt.

c2) Im Falle der Herabsetzung wird dann die Schlupfvariable s_2 von 25 auf 0 reduziert. Es handelt sich damit dann ebenfalls um einen Engpassfaktor.

6 Übung S 6

Aufgabe 2	**15 Punkte**

Die westfälische OiL-X GmbH stellt Otto-Kraftstoff P_1 und Diesel P_2 her. Zur Produktion wird lediglich leichtes Rohöl R als Rohstoff benötigt, wovon für die nächste Periode insgesamt 225 Barrel geliefert werden können. Zudem stehen der Firma 320 Arbeitsstunden für die Herstellung zur Verfügung. Aufgrund der Nachfragestruktur am Markt werden die Produkte P_1 und P_2 höchstens im Verhältnis $2 : 3$ produziert. Nachstehender Tabelle sind der Rohstoffverbrauch der Erzeugnisse, die Herstellungszeiten sowie der mit dem Verkauf erzielbare Deckungsbeitrag angegeben:

	P_1	P_2
Rohöl in Barrel pro Liter	0,02	0,025
Herstellungszeit in Minuten pro Liter	2	4
Deckungsbeitrag in Euro-Cent pro Liter	13,8	15,0

Hinweis: Verwenden Sie bei der Modellierung für die Produkte P_i die Entscheidungsvariablen x_i $(i = 1, 2)$ und für die Rohstoffrestiriktion die Schlupfvariable s_1, für die Zeitrestiriktion s_2 sowie für die Verhältnisrestiriktion s_3.

a) Überführen Sie zunächst das angegebene Verhältnis der Produkte P_1 und P_2 in eine lineare Nebenbedingung.

b) Stellen Sie ein entsprechendes lineares Optimierungsmodell zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximalem Gesamtdeckungsbeitrag auf. Geben Sie hierbei die Zeitrestriktion in der Einheit „Minuten/Liter" an.

c) Stellen Sie ein Anfangstableau für die Berechnung der optimalen Lösung mittels Simplexalgorithmus auf und markieren Sie das Pivot-Element.

d) Vervollständigen Sie die Simplextableaus auf Seite 9 der Lösungsbögen zur Bestimmung der optimalen Lösung des Problems.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
1	$-\frac{63}{10}$	0	0	$\frac{15}{4}$	0	72.000
0	0	0	1	0	0	105
0	$\frac{1}{2}$	1	0	$\frac{1}{4}$	0	4.800
0	4	0	0	$\frac{1}{2}$	1	9.600

e) Wie viele Liter sind von P_1 und P_2 herzustellen?

f) Wie hoch ist der Gesamtdeckungsbeitrag in Euro?

g) Kurzfristig soll noch ein Kunststoff-Erzeugnis P_3 in die Planung mit einbezogen werden. Es werden insgesamt 2.150 Stück bei einem Rohölverbrauch von 0,04 Barrel pro Stück nachgefragt. Die Zeitrestriktion kommt nicht zum Tragen, da die Produktion ausgelagert ist, und ein besonderes Verhältnis ist ebenfalls nicht zu beachten. Können die 2.150 Stück von P_3 im Rahmen der bisherigen Planung realisiert werden?

Lösung S 6

a) Das angegebene Mengenverhältnis lautet:

$$\frac{x_1}{x_2} \leq \frac{2}{3} \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x_1 \leq 2x_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 3x_1 - 2x_2 \leq 0$$

b) Aus der Aufgabenstellung entnehmen wir das lineare Optimierungsmodell

$$\begin{array}{llrcrcr}
\max & x_0 & = 13,8x_1 & + & 15x_2 & & \\
\text{u.d.N.} & & 0,02x_1 & + & 0,025x_2 & \leq & 225 \\
& & 2\;\;x_1 & + & 4x_2 & \leq & 19.200 \\
& & 3\;\;x_1 & - & 2x_2 & \leq & 0 \\
\text{NNB} & & x_1, & & x_2 & \geq & 0
\end{array}$$

(Vorsicht Falle: 320 Stunden = 320 * 60 = 19.200 Sekunden !)

c) Durch Einführung von *Schlupfvariablen* s_i ergibt sich daraus folgende Aufgabe:

$$
\begin{array}{llcl}
\max & x_0 & & \\
\text{u.d.N.} & x_0 - 13,8x_1 - 15\,x_2 & = & 0 \\
 & 0,02x_1 + 0,025\,x_2 + s_1 & = & 225 \\
 & 2\,x_1 + 4\,x_2 + s_2 & = & 19.200 \\
 & 3\,x_1 - 2\,x_2 + s_3 & = & 0 \\
\text{NNB} & x_1,\ x_2,\ s_1,\ s_2,\ s_3 & \geq & 0
\end{array}
$$

Dieses notieren wir nun in der üblichen Tableau-Schreibweise.

TABLEAU I:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
1	$-13,8$	-15	0	0	0	0
0	$0,02$	$0,025$	1	0	0	225
0	2	4	0	1	0	19.200
0	3	-2	0	0	1	0

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{-13,8\,;\ -15\,;\ 0\,;\ 0\} = -15$$

Damit wird die x_2-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite“ dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	*Quotient*
1	$-13,8$	-15	0	0	0	0	
0	$0,02$	$0,025$	1	0	0	225	$225 : 0,02 = 11250$
0	2	4	0	1	0	19.200	$19200 : 2 = 9600$
0	$\boxed{3}$	-2	0	0	1	0	$0 : 3 = 0$

Wegen $\min\{11250; 9600; 0\} = 0$ ist die 4. Zeile die *Pivotzeile*.

Damit wird die „3“ zum *Pivotelement*.

d) In der Aufgabenstellung ist folgendes TABLEAU II gegeben:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
1	$-63/10$	0	0	$15/4$	0	72.000
0	0	0	1	0	0	105
0	$1/2$	1	0	$1/4$	0	4.800
0	4	0	0	$1/2$	1	9.600

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{-63/10\,;\ 0\,;\ 0\,;\ 15/4; 0\} = -63/10$$

Damit wird die x_1-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite“ dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	*Quotient*
1	$-63/10$	0	0	$15/4$	0	72.000	
0	0	0	1	0	0	105	105 : 0 entfällt
0	$1/2$	1	0	$1/4$	0	4.800	4800 : $1/2$ = 9600
0	$\boxed{4}$	0	0	$1/2$	1	9.600	9600 : 4 = 2400

Wegen $\min\{9600\,;\ 2400\} = 2400$ ist die 4. Zeile die *Pivotzeile*.

Damit wird die „4“ zum *Pivotelement*.

Das *Pivotelement* bringen wir durch Division auf den Wert 1

Hilfstableau:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	
1	$-63/10$	0	0	$15/4$	0	72.000	$I + 63/10 \cdot IV$
0	0	0	1	0	0	105	
0	$1/2$	1	0	$1/4$	0	4.800	$III - 1/2 \cdot IV$
0	$\boxed{1}$	0	0	$1/8$	1	2.400	

Nun müssen wir alle Elemente in der *Pivotspalte* durch geeignete Addition der *Pivotzeile* auf Null bringen.

TABLEAU III:

x_0	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b
1	0	0	0	$363/80$	$63/10$	87.120
0	0	0	1	0	0	105
0	0	1	0	$3/16$	$-1/2$	3.600
0	1	0	0	$1/8$	1	2.400

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (87.120 \mid 2.400, 3.600, 105, 0, 0)$$

e) Die Lösung lautet:

$$(x_0 \mid x_1, x_2, s_1, s_2, s_3) = (87.120 \mid 2.400, 3.600, 105, 0, 0)$$

Hieraus entnehmen wir:

Die OiL-X GmbH stellt $x_1 = 2.400$ [Liter] Otto-Kraftstoff (P_1) und $x_2 = 3.600$ [Liter] Diesel (P_2) her.

f) Der Gesamtgewinn beträgt $x_0 = 87.120$ Euro-Cent = 871,20 Euro.

g) Aus der Lösung entnehmen wir ferner, dass die beiden Schlupfvariablen s_2 (Zeitrestriktion) und s_3 (Mengenverhältnis) gleich Null sind.

$s_1 = 105$ bedeutet, das noch 105 Barrel Rohöl vorrätig sind.

Für das Kunststoff-Erzeugnis P_3 werden lediglich 2.150 x 0,04 = 86 Barrel Rohöl benötigt.

Daher können 2.150 Einheiten von Produkt P_3 hergestellt werden.

7 Übung S 7

Aufgabe 2	**15 Punkte**

Die ABC GbR stellt die Erzeugnisse P_1, P_2 und P_3 her. Zur Produktion werden die Rohstoffe R_1 sowie R_2 benötigt, wovon für die nächste Periode 50 Mengeneinheiten (ME) von R_1 und 86 ME von R_2 geliefert werden können. Zudem können aus technischen Gründen von Erzeugnis P_1 höchstens 75 Stück hergestellt werden, und es stehen der Firma 12 Arbeitsstunden für die Produktion zur Verfügung. In der nachstehenden Tabelle sind die Rohstoffverbräuche in ME pro Stück der Erzeugnisse, die Herstellungszeiten in Stunden pro Stück sowie der mit dem Verkauf pro Stück erzielbare Deckungsbeitrag angegeben:

	P_1	P_2	P_3
Rohstoffverbrauch von R_1 in ME pro Stück	3	2	2
Rohstoffverbrauch von R_2 in ME pro Stück	4	2	4
Herstellungszeit in Stunden pro Stück	0,25	3	0,5
Deckungsbeitrag in Euro pro Stück	130	80	110

$a)$ Stellen Sie ein entsprechendes lineares Optimierungsmodell zur Bestimmung eines Produktionsplans mit maximalem Gesamtdeckungsbeitrag auf.

$b)$ Stellen Sie ein Anfangstableau für die Berechnung der optimalen Lösung mittels Simplexalgorithmus auf und markieren Sie das Pivot-Element.

$c)$ Vervollständigen Sie die Simplextableaus auf Seite 9 der Lösungsbögen zur Bestimmung der optimalen Lösung des Problems.

x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b
1	0	-5	0	20	$\frac{35}{2}$	0	0	2.505
0	1	1	0	1	-$\frac{1}{2}$	0	0	7
0	0	$-\frac{1}{2}$	1	-1	$\frac{3}{4}$	0	0	$\frac{29}{2}$
0	0	3	0	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	1	0	3
0	0	-1	0	-1	$\frac{1}{2}$	0	1	68

$d)$ Wie viele Stück sind von P_1, P_2 und P_3 im Optimum herzustellen?

$e)$ Wie hoch ist der maximale Gesamtdeckungsbeitrag in Euro?

$f)$ Aufgrund einer veränderten Marktsituation möchte das Unternehmen kurzfristig ein weiteres Erzeugnis P_4 mit in die Produktion aufnehmen. Der Rohstoffverbrauch von R_1 beträgt 4 ME und der von R_2 beträgt 3 ME pro Stück. Die Herstellzeit wird mit 1 Stunde pro Stück kalkuliert, und es kann ein Deckungsbeitrag in Höhe von 95 Euro pro Stück erzielt werden. Ist es dem Unternehmen möglich, bei unveränderten Rahmenbedigungen das neue Erzeugnis P_4 herzustellen? Bitte begründen Sie Ihre Aussage!

Lösung S 7

a) Das lineare Optimierungsmodell lautet:

$$\begin{array}{lrrrrl}
\max & x_0 = & 130x_1 & +80x_2 & +110x_3 & \\
\text{u.d.N.} & & 3x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \leq 50 \\
 & & 4x_1 & +2x_2 & +4x_3 & \leq 86 \\
 & & 0,25x_1 & +3x_2 & +0,5x_3 & \leq 12 \\
 & & 1x_1 & & & \leq 75 \\
\text{NNB} & & x_1, & x_2, & x_3 & \geq 0
\end{array}$$

b) Durch Einführung von *Schlupfvariablen* s_i ergibt sich daraus folgende Aufgabe:

$$\begin{array}{llrrrrrrrl}
\max & x_0 & & & & & & & & \\
\text{u.d.N.} & x_0- & 130\,x_1- & 80\,x_2- & 110\,x_3 & & & & & = 0 \\
 & & 3\,x_1+ & 2\,x_2+ & 2\,x_3 & +s_1 & & & & = 50 \\
 & & 4\,x_1+ & 2\,x_2+ & 4\,x_3 & & +s_2 & & & = 86 \\
 & & 0,25\,x_1+ & 3\,x_2+ & 0,5\,x_3 & & & +s_3 & & = 12 \\
 & & 1\,x_1 & & & & & & +s_4 & = 75 \\
\text{NNB} & & x_1, & x_2, & x_3, & s_1, & s_2, & s_3, & s_4 & \geq 0
\end{array}$$

Dieses notieren wir nun in der üblichen Tableau-Schreibweise.

TABLEAU I:

x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b
1	-130	-80	-110	0	0	0	0	0
0	3	2	2	1	0	0	0	50
0	4	2	4	0	1	0	0	86
0	0,25	3	0,5	0	0	1	0	12
0	1	0	0	0	0	0	1	75

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{-130; -80; -110; 0; 0; 0; 0\} = -130$$

Damit wird die x_1-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite“ dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b	*Quotient*
1	-130	-80	-110	0	0	0	0	0	
0	$\boxed{3}$	2	2	1	0	0	0	50	$50 : 3 = 16,\overline{6}$
0	4	2	4	0	1	0	0	86	$86 : 4 = 21,5$
0	0,25	3	0,5	0	0	1	0	12	$75 : 1 = 75,0$
0	1	0	0	0	0	0	1	75	$12 : 0,25 = 48,0$

Wegen $\min\{16,\overline{6}; 21,5; 75; 48\} = 16,\overline{6}$ ist die 2. Zeile die *Pivotzeile*.

Damit wird die „3“ zum *Pivotelement*.

c) In der Aufgabenstellung ist folgendes TABLEAU II gegeben:

x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b
1	0	-5	0	20	$^{35}/_{2}$	0	0	2.505
0	1	1	0	1	$-^{1}/_{2}$	0	0	7
0	0	$-^{1}/_{2}$	1	-1	$^{3}/_{4}$	0	0	$^{29}/_{2}$
0	0	3	0	$^{1}/_{4}$	$-^{1}/_{4}$	1	0	3
0	0	-1	0	-1	$^{1}/_{2}$	0	1	68

Zur Bestimmung der *Pivotspalte* suchen wir den kleinsten negativen Wert der Zielfunktionszeile:

$$\min\{0; -5; 0; 20; {}^{35}/_{2}; 0; 0\} = -5$$

Damit wird die x_2-Spalte zur *Pivotspalte*.

Zur Bestimmung der *Pivotzeile* suchen wir den kleinsten Quotienten aus „rechter Seite" dividiert durch das Element der *Pivotspalte*, sofern dieses positiv ist.

x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b	*Quotient*
1	0	−5	0	20	35/2	0	0	2.505	
0	1	1	0	1	−1/2	0	0	7	7 : 1 = 7
0	0	−1/2	1	−1	3/4	0	0	29/2	29/2 : −1/2 entfällt
0	0	$\boxed{3}$	0	1/4	−1/4	1	0	3	3 : 3 = 1
0	0	−1	0	−1	1/2	0	1	68	68 : (−1) entfällt

Wegen $\min\{7; 1\} = 1$ ist die 4. Zeile die *Pivotzeile*.

Damit wird die „3" zum *Pivotelement*.

Das *Pivotelement* bringen wir durch Division auf den Wert 1

<u>Hilfstableau</u>:

x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b	
1	0	−5	0	20	35/2	0	0	2.505	$I + 5 \cdot IV$
0	1	1	0	1	−1/2	0	0	7	$II - IV$
0	0	−1/2	1	−1	3/4	0	0	29/2	$III + {}^{1}/_{2} \cdot IV$
0	0	$\boxed{1}$	0	1/12	−1/12	1/3	0	1	
0	0	−1	0	−1	1/2	0	1	68	$V + IV$

Nun müssen wir alle Elemente in der *Pivotspalte* durch geeignete Addition der *Pivotzeile* auf Null bringen.

TABLEAU III:

x_0	x_1	x_2	x_3	s_1	s_2	s_3	s_4	b
1	0	0	0	$20,41\overline{6}$	$17,08\overline{3}$	$5/3$	0	2.510
0	1	0	0	$11/12$	$-5/12$	$-1/3$	0	6
0	0	0	1	$-23/24$	$17/24$	$1/6$	0	15
0	0	1	0	$1/12$	$-1/12$	$1/3$	0	1
0	0	0	0	$-11/12$	$5/12$	$1/3$	1	69

Da in der Zielfunktionszeile keinen negativen Werte mehr enthalten sind, ist dieses Tableau optimal.

d) Die Lösung lautet:

$(x_0 \mid x_1, x_2, x_3, s_1, s_2, s_3, s_4) = (2.510 \mid 6; 1; 15; 0; 0; 0; 69)$

Hieraus entnehmen wir folgende Produktionsmengen:

$$\begin{aligned} \text{Produkt } P_1&: \; x_1 = 6 \text{ Stück} \\ \text{Produkt } P_2&: \; x_2 = 1 \text{ Stück} \\ \text{Produkt } P_3&: \; x_3 = 15 \text{ Stück} \end{aligned}$$

Aus der Lösung entnehmen wir ferner, dass die drei Schlupfvariablen s_1, s_2 und s_3 gleich Null sind. Das bedeutet, dass die zugehörigen Ressourcen vollständig erschöpft sind.

$s_4 = 69$ bedeutet: Von dieser Ressource (der maximalen Anzahl von Produkt $P_1 =$ 75 Stück) sind noch 69 mögliche Stück übrig.

e) Der Gesamtgewinn beträgt $x_0 = 2.510$ Euro.

f) Die Ressourcen sind (bis auf die maximale Anzahl der Produkte P_1) vollständig erschöpft.

Also müsste eines der Produkte P_1, P_2 oder P_3 mit reduzierter Menge produziert werden.

Da lediglich P_2 einen geringeren Deckungsbeitrag als P_4 hat, müsste P_2 eliminiert werden.

Das Produkt P_2 wird aber nur einmal hergestellt.

Damit wären 2 [ME] von Rohstoff R_1 und 2 [ME] von Rohstoff R_2 verfügbar.

Das Produkt P_4 benötigt aber 4 [ME] von Rohstoff R_1 und 3 [ME] von Rohstoff R_2.

Daher kann P_4 <u>nicht</u> hergestellt werden.